تمهيدية :

لتكن A جبر لي فوق الحقل R و J , I مثاليين مميزين في A عندئذٍ $[I,J]$ مثالي مميز في A

البرهان :

نفرض أن J , I مثاليين مميزين في A لدينا حسب التعريف $[I,J]$ مودول جزئي في A لأن $[I,J] = \langle L \rangle$

حيث $L = \{[x,y] ; x \in I , y \in J\}$

نبرهن على أنه إذا كان $d \in Der(A)$ فإن

$$d([I,J]) \subseteq [I,J]$$

ليكن $x \in [I,J] = \langle L \rangle$ كيفي

$$x = \sum \lambda_i a_i \quad ; \quad \lambda_i \in R \quad a_i \in L$$

$$d(x) = d\left(\sum \lambda_i a_i\right)$$

$$= \sum d(\lambda_i a_i) = \sum \lambda_i d(a_i)$$

بما أن $a_i \in L$ فإن $a_i = [x_i, y_i] ; x_i \in I , y_i \in J$ ومنه فإن

$$d(a_i) = d([x_i, y_i])$$

$$= [d(x_i), y_i] + [x_i, d(y_i)]$$

وبالتالي

$$d(x) = \sum \lambda_i d(a_i) = \sum \lambda_i [\underbrace{d(x_i)}_{\in I}, y_i] + \sum \lambda_i [x_i, \underbrace{d(y_i)}_{\in J}]$$

$$\in \langle L \rangle$$

وهذا يبين أن $d([I,J]) \subseteq [I,J]$

مبرهنة:
لتكن A جبر لي معرف على الحلقة R و I مثالي في A. إذا كان $I=[I,I]$ عندئذٍ فإن I مثالي مميز في A.

البرهان:
لما كان I مثالي في A فإن I هو معرّف على A ولبرهان أن I مميز في A يجب أن $d(I)\subseteq I$ $\forall d\in Der(A)$ نعرف المجموعة

$$\mathcal{L}=\{[x,y] ; x,y\in I\}$$

لدينا $I=[I,I]=\langle\mathcal{L}\rangle$

$$\forall a\in I ; a=\overset{\text{محدودة}}{\sum}\lambda_i x_i ; \lambda_i\in R \quad x_i\in\mathcal{L}$$

وأن

$$x_i=[y_i,z_i] ; y_i,z_i\in I$$

$$d(a)=d\left(\sum\lambda_i x_i\right)=\sum d(\lambda_i x_i)=\sum\lambda_i d(x_i)$$

$$\Rightarrow d(x_i)=d([y_i,z_i])=[d(y_i),z_i]+[y_i,d(z_i)]$$

$$=d_{d(y_i)}(z_i)-[d(z_i),y_i]$$

$$=\underbrace{d_{\underset{\in A}{d(y_i)}}(\underset{\in I}{z_i})}_{\in I}-\underbrace{d_{\underset{\in A}{d(z_i)}}(\underset{\in I}{y_i})}_{\in I}$$

$$\Rightarrow d(a)=\sum\lambda_i d(x_i)\in\langle\mathcal{L}\rangle=I$$

مثال:
لتكن R حلقة تبديلية واحدية لنفرض أن

$$M_n(R)=\{(a_{ij}) ; a_{ij}\in R\}$$

مجموعة المصفوفات من المرتبة n والتي عناصرها من الحلقة R.

الحل:

ليكن $a_{ij}\ ,\ b_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$

جمع مصفوفتين $(a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})$

إن الثنائية $(M_n(\mathbb{R}),+)$ هي زمرة جمعية تبديلية والعنصر الحيادي فيها هو المصفوفة الصفرية ونظير أي عنصر $a_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ هو $-a_{ij}=(-a_{ij})$

$$\cdot : \mathbb{R} \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$(r, (a_{ij})) \longrightarrow (r.(a_{ij})) = (r.a_{ij})$$

$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \qquad a_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$

$$(\lambda_1+\lambda_2)(a_{ij}) = (\overbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}^{\in \mathbb{R}} a_{ij}) = (\lambda_1 a_{ij} + \lambda_2 a_{ij})$$

$$= (\lambda_1 a_{ij}) + (\lambda_2 a_{ij})$$

$\forall\ (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda((a_{ij})+(b_{ij})) = \lambda.(a_{ij}+b_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij})$$

$$= (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \lambda(b_{ij})$$

$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \forall\ a_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$

$$\lambda(\mu(a_{ij})) = \lambda(\mu a_{ij}) = (\lambda(\mu a_{ij}))$$

$$= ((\lambda\mu)(a_{ij})) = (\lambda.\mu).(a_{ij})$$

$$1.(a_{ij}) = (1.a_{ij}) = a_{ij}$$

ومنه فإن $M_n(\mathbb{R})$ مودول فوق $\mathbb{R}$

$$\cdot : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \longrightarrow A.B = AB - BA$$

نزوّد جبر المحدود $M_n(R)$ بجبر لي المعرف بعملية ضرب بالشكل

$$[\ ,\ ] : M_n(R) \times M_n(R) \longrightarrow M_n(R)$$

$$(A,B) \longrightarrow [A,B] = AB - BA$$

① $[A,A] = AA - AA = 0 \qquad \forall A \in M_n(R)$

② $\forall A,B,C \in M_n(R) : [A+B, C] =$

$$= (A+B).C - C(A+B)$$

$$= A.C + BC - CA - CB$$

$$= [A,C] + [B,C]$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن الضرب توزيعي على الجمع من اليسار

$$[A, B+C] = [A,B] + [A,C]$$

$$\forall \alpha \in R \qquad [\alpha A, B] = (\alpha A)B - B(\alpha A)$$

$$= \alpha(AB) - \alpha(BA)$$

$$= \alpha(AB - BA) = \alpha[A,B]$$

بنفس الطريقة نثبت أنه $[A, \alpha B] = \alpha[A,B]$

$$\forall A,B,C \in M_n(R) : [A,[B,C]] = A.[B,C] - [B,C].A$$

$$= A(BC - CB) - (BC - CB)A$$

$$= \boxed{ABC - ACB - BCA + CBA} \quad ①$$

$$[B,[C,A]] = B[C,A] - [C,A]B$$

$$= B(CA - AC) - (CA - AC)B$$

$$= \boxed{BCA - BAC - CAB + ACB} \quad ②$$

$$[C,[A,B]] = C[A,B] - [A,B]C$$
$$= C(AB-BA) - (AB-BA)C$$
$$= CAB - CBA - ABC + BAC \quad ③$$

نجمع ① و ② و ③ نجد أن

$$[A,[B,C]] + [B,[A,C]] + [C,[A,B]] = 0$$

وبالتالي فإن $M_n(R)$ هو جبر لي فوق الحلقة R

جداءات الجبريات الجزئية في جبر لي:

تعريف:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R. لنفرض أن B, D جبريات جزئية غير خالية في A. نسمي المجموعة

$$[B,D] = \{[b,d] : b \in B,\ d \in D\}$$

جداء الجبريتين B و D في A

مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R و B, D, K جبريات جزئية في A عندئذ:

① $[B,D] = [D,B]$

② $[B+D,K] = [B,K] + [D,K]$

③ $[B,[K,D]] \subseteq [K,[D,B]] + [D,[B,K]]$

④ $[B \cap K, D] \subseteq [B,D] \cap [K,D]$

البرهان:

① ليكن $x \in [B,D]$ فإنه يوجد $b \in B$ ، $d \in D$ بحيث

$$x = [b,d] = -[d,b] = [\underbrace{-d}_{\in D}, \underbrace{b}_{\in B}] \in [D,B]$$

ومنه $[B,D] \subseteq [D,B]$ وبطريقة مشابهة نثبت الاحتواء المعاكس

② لتكن $x \in [B+D, K]$ عندئذٍ $x=[a,k]$ حيث $k\in K$ ، $a\in B+D$

ومنه $\forall b\in B,\ d\in D;\ a=b+d$

$$x=[a,k]=[b+d,k]=[b,k]+[d,k]\in[B,K]+[D,K]$$

وبالتالي $[B+D,K]\subseteq[B,K]+[D,K]$

لتكن $y\in[B,K]+[D,K]$ عندئذٍ $y=x+z$ حيث $x\in[B,K]$

$z\in[D,K]$ ومنه يكون

$$x=[b,k_1] \qquad z=[d,k_2]$$

$$\forall\ b\in B,\ d\in D,\ k_1,k_2\in K$$

وبالتالي يكون

$$y=x+z=[b,k_1]+[d,k_2]$$

$$y=x+z=[b,k_1]-[d,k_1]+[d,k_1]+[d,k_2]$$

$$=[b-d,k_1]+[d,k_1+k_2]\in[B+D,K]+[D,K]\subseteq[B+D,K]$$

③ لتكن $x\in[B,[K,D]]$ عندئذٍ $x=[b,a];\ b\in B$ ، $a\in[K,D]$

ومنه $a=[k,d];\ k\in K,\ d\in D$

$$x=[b,a]=[b,[k,d]]=-[k,[d,b]]-[d,[b,k]]$$

$$\in[K,[D,B]]+[D,[B,K]]$$

انتهت المحاضرة